DOI 10.15826/urej.2018.2.2.004 УДК 006.91, 53.088

Парадоксы при оценке погрешностей результатов измерений по действующим нормативным документам

Э. Г. Миронов[1], *Г. Ж. Ордуянц*[2]
[1] Свободный ученый, Екатеринбург, Россия

[2] Уральский государственный лесотехнический университет, Екатеринбург, Россия

galiord@rambler.ru

Аннотация. Рассмотрены методы суммирования систематических погрешностей по государственному стандарту ГОСТ Р 8.736–2011 и по рекомендациям Р50.2.038–2004. Показано, что предписания государственного стандарта и рекомендации по Р50.2.038–2004 частично противоречат друг другу. Так, по стандарту предусмотрено арифметическое суммирование систематических погрешностей, если число слагаемых $m = 2$, и геометрическое суммирование с коррекцией тех же погрешностей, если число слагаемых $m \geqslant 3$. Рекомендации предусматривают только геометрическое суммирование, независимо от слагаемых. Наличие в стандарте арифметического и геометрического приводит к парадоксу: суммарная погрешность при двух слагаемых может оказаться меньше суммарной погрешности при дополнении первых двух слагаемых третьим слагаемым. Рассмотрены также методы суммирования систематических и случайных погрешностей по государственному стандарту ГОСТ Р 8.736–2011, введенному в действие с 01.01.2013 впервые.

Ключевые слова. Нормативные документы, систематические погрешности, случайные погрешности, суммарные погрешности, методы суммирования, противоречивость методов суммирования, преодоление противоречий, рекомендации.

Paradoxes in the Evaluation of Errors in Measurement Results According to the Current Regulatory Documents

Eduard G. Mironov[1], *Galina Zh. Ordyuants*[2]
[1] Freelance scientist, Ekaterinburg, Russia

[2] Ural State Forest Engineering University, Ekaterinburg, Russia

galiord@rambler.ru

Abstract. The methods of summation of systematic errors according to the state standard GOST R 8.736–2011 and recommendations P50.2.038–2004 are considered. It is demonstrated that the requirements of the state standard and recommendations on P50.2.038–2004 are partially contradictory. So according to the standard, the arithmetic summation of systematic errors is provided, if the number of summands is $m = 2$, and the geometric summation with correction of the same errors, if the number of summands is $m \geqslant 3$. The recommendations provide only geometric summation, regardless of the summands. The presence of arithmetic and geometric summation in the standard leads to a paradox: the total error for two terms can be less than the total error when the first two terms add the third term. The same methods of summarizing systematic and random errors according to the state standard GOST R 8.736–2011, introduced since 01/01/2013 for the first time, are considered. Prior to the introduction of the new standard, the methods for processing the results of direct multiple measurements and calculating their errors were established by the state standard GOST 8.207–76, canceled in 2012.

Comparison of the new and old standards shows that they differ from each other only partially. The basic provisions of the old standard have been moved to a new standard and, together with them, the shortcomings of the old standard have shifted to the new standard. It is demonstrated that the use of prescriptions of both old and new standards leads to contradictory results in some cases. For example, when summing up the systematic not excluded and random errors, it may turn out that the total error is less than one of the summands. This is especially apparent when there are a small number of measurements and a high confidence probability. A new method for summing the systematic and random errors that are not excluded from the defect when summing up according to the GOST 8.736–2011 standard is proposed. When using the proposed summation method, the error is always larger than any of the summands or equal to it after rounding according to the current rules in metrology, if one of the summands is significantly smaller than the other.

Keywords. Normative documents, systematic errors, random errors, total errors, summation methods, inconsistency of summation methods, overcoming of contradictions, recommendations.

Порядок суммирования систематических погрешностей определяется государственным стандартом ГОСТ Р 8.736–2011 [1], введенным в действие 01.01.2013 (впервые), и рекомендациями Р 50.2.038–2004 [2], введенными в действие 01.01.2005 взамен МИ1552–86.

Стандарт [1] распространяется на прямые многократные независимые измерения и устанавливает порядок оценки границ и доверительных границ неисключенной систематической погрешности (далее — НСП). Рекомендации [2] распространяются на прямые однократные измерения и устанавливают порядок оценки доверительных границ НСП.

Составляющими НСП, подлежащими суммированию, могут быть: инструментальная погрешность, погрешность используемого метода измерения и погрешности от влияющих факторов (например, от воздействия температуры, магнитного поля, вибрации и т. д.). Стандарт

[1] предусматривает два вида суммирования: арифметическое и геометрическое. Арифметическое суммирование проводится по формуле (1) при наличии двух слагаемых. Геометрическое суммирование — по формуле (2) при наличии трех и более слагаемых:

$$\theta_{\Sigma 1} = \pm\sum_{i=1}^{m}\left|\theta_j\right|, \tag{1}$$

$$\theta_{\Sigma 2} = \pm k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\theta_j^2}, \tag{2}$$

где $\theta_{\Sigma 1}$ — граница НСП; $\theta_{\Sigma 2}$ — доверительная граница НСП; m — число составляющих НСП; θ_j —граница j-ой составляющей НСП; k — коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью P и числом составляющих НСП и их соотношением между собой.

Рекомендации предусматривают только геометрическое суммирование. Доверительную границу НСП (без учета знака) вычисляют в этом случае по формуле:

$$\theta(P) = k\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\theta_j^2}, \tag{3}$$

где $\theta(P)$ — доверительная граница НСП; P — принятая доверительная вероятность; k — поправочный коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью и числом составляющих НСП; θ_j — определено выше.

Вызывает недоумение тот факт, что два действующих нормативных документа по-разному трактуют одни и те же положения. Так, документ [1] предусматривает арифметическое и геометрическое суммирование составляющих НСП. Документ [2] предусматривает только геометрическое суммирование тех же самых величин. Документ [1] предписывает учитывать знаки при оценке границ НСП (по формулам (1) и (2)). Документ [2] рекомендует оценивать границу НСП без учета знака (по формуле (3)).

Объяснить рассмотренные отличия в оценке границ НСП тем, что документ [1] распространяется на многократные, а документ [2] — на однократные измерения, не представляется возможным, так как границы НСП от числа измерений не зависят. Напомним, что составляющими границы НСП являются: погрешность используемого средства измерения, погрешность используемого метода измерения и погрешности от влияющих факторов (температуры, электрических и магнитных полей, влажности и т. д.).

Каждая из перечисленных составляющих не зависит от числа измерений и может быть найдена до их проведения. Соответственно, и границы НСП могут быть оценены до проведения каких-либо измерений.

Особенно серьезные возражения возникают в части использования в документе [1] и арифметического (по формуле (1)), и геометрического (по формуле (2)) суммирования. На примерах расчета границ НСП по формуле (1) и расчета доверительных границ НСП по формуле (2) покажем, к чему это противоречие может привести.

Пример 1

Для многократного измерения электрического напряжения планируется использовать вольтметр и метод измерений с известными погрешностями. Найти границы НСП, если погрешность вольтметра $\theta_1 = 0{,}9\,\text{В}$, а погрешность использованного метода измерения $\theta_2 = 0{,}7\,\text{В}$.

Учитывая, что число слагаемых $m = 2$, воспользуемся для оценки границы НСП $\theta_{\Sigma 1}$ формулой (1).

$$\theta_{\Sigma 1} = \pm\left(\left|\theta_1\right| + \left|\theta_2\right|\right) = \pm\left(0{,}9 + 0{,}7\right) = \pm 1{,}6\,\text{В}.$$

Итак, $\theta_{\Sigma 1} = \pm 1{,}6\,\text{В}.$

Пример 2

Учитывая условия примера 1, найти с доверительной вероятностью $P = 0{,}95$ доверительные границы НСП, если дополнительно к погрешностям примера 1 требуется учесть температурную погрешность $\theta_3 = 0{,}5\,\text{В}$.

В данном случае $m = 3$ и необходимо воспользоваться формулой (2) для оценки доверительной границы НСП $\theta_{\Sigma 2}$.

$$\theta_{\Sigma 2} = \pm k\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} = \pm 1{,}1\sqrt{0{,}9^2 + 0{,}7^2 + 0{,}5^2} = \pm 1{,}4\ \text{В}.$$

Здесь принято $k = 1{,}1$ для $P = 0{,}95$ и $m = 3$.

Итак, $\theta_{\Sigma 2} = \pm 1{,}4\ \text{В}.$

Сопоставляя полученные результаты, легко заметить, что появление дополнительной температурной погрешности привело к уменьшению суммарной НСП. Следовательно, к существующим погрешностям добавилась еще одна, а суммарная НСП стала меньше. Такого парадокса не было при использовании прежнего государственного стандарта (ГОСТ 8.207–76 [3], ныне отмененного) по оценке погрешностей прямых многократных измерений. Нет отмеченного парадокса при использовании формулы (3), приведенной выше.

Недостатки стандарта [1] настолько очевидны, что требуется его значительная переработка. На наш взгляд, п. 8, «Доверительные границы неисключенной систематической погрешности», необходимо исключить. Вместо п. 8 стандарта [1] могут быть использованы п. 6.2.1 рекомендаций [2] (с использованием формулы (6) и пояснений к ней) или п. 4 стандарта [3].

Нам представляется, что п. 6.2.1 рекомендаций [2] и п. 4 стандарта [2] целесообразно несколько видоизменить. Пункт 8 стандарта [1] можно сформулировать в следующей редакции: доверительную границу неисключенной систематической погрешности результата измерения θ вычисляют (без учета знака) по формуле:

$$\theta = k\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\theta_j^2}, \tag{4}$$

где θ_j — граница j-й НСП; m — число составляющих НСП; k — коэффициент, зависящий от принятой доверительной вероятности P и числа составляющих НСП.

Значение коэффициента k:

$P = 0{,}95$ $m = 1$ $k = 1{,}0$;
$P = 0{,}99$ $m = 1$ $k = 1{,}0$;
$P = 0{,}99$ $m = 3$ $k = 1{,}3$;
$P = 0{,}95$ $m \geqslant 2$ $k = 1{,}1$;
$P = 0{,}99$ $m \geqslant 2$ $k = 1{,}2$;
$P = 0{,}99$ $m \geqslant 4$ $k = 1{,}4$.

Границы НСП результата измерения образуются из составляющих, в качестве которых могут быть:

- погрешность средства измерения;
- погрешность метода;
- погрешности, вызванные другими причинами.

При суммировании составляющих НСП результата измерения погрешности каждого типа рассматриваются как случайные величины, закон распределения которых считается равномерным.

Значения доверительных границ НСП по формуле (4) для примера 1 и примера 2 соответственно составят: $\theta_1 = 1{,}3$ В и $\theta_2 = 1{,}4$ В.

Таким образом, при использовании формулы (4) увеличение числа составляющих НСП приводит к увеличению суммарной погрешности. Другими словами, предлагаемый метод оценки доверительных границ НСП свободен от «парадокса», присущего стандарту ГОСТ Р 8.736–2011, и может быть использован на практике для решения метрологических задач при обработке результатов прямых многократных измерений.

В работах [4, 5] показано, что использование стандарта [3] приводит в ряде случаев к противоречивым результатам. Например, при суммировании неисключенной систематической и случайной погрешностей может оказаться, что суммарная погрешность меньше одного из слагаемых. В работе [6] отмечен другой недостаток стандарта [3] — сложность и громоздкость необходимых вычислений.

Оба указанных недостатка присущи и новому стандарту [1]. Для иллюстрации сказанного рассмотрим порядок вычисления погрешности результатов измерения по ГОСТ 8.736–2011. При решении поставленной задачи оцениваются следующие величины: $\overline{x}$; S; $S_{\overline{x}}$; ε; θ; K; S_0; Δ.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{5}$$

где $\overline{x}$ — среднее арифметическое значение; n — число измерений; x_i — результат i-го измерения.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}}, \tag{6}$$

где S — среднее квадратическое отклонение (СКО).

$$S_{\overline{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}, \tag{7}$$

где $S_{\overline{x}}$ — СКО среднего арифметического значения.

$$\varepsilon = t \cdot S_{\overline{x}},$$

где ε — доверительные границы случайной погрешности (далее — случайная погрешность); t — коэффициент Стьюдента.

$$\Theta = \pm k\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\Theta_j^2}, \tag{9}$$

где Θ — доверительные границы неисключенной систематической погрешности (далее — НСП); Θ_j — j-ая составляющая НСП; m — число слагаемых; k — коэффициент, зависящий от принятой доверительной вероятности P и числа слагаемых m.

$$\Delta = K \cdot S_{\Sigma}, \tag{10}$$

где Δ — доверительные границы оценки погрешности измеряемой величины (в дальнейшем — суммарная погрешность); K — коэффициент; S_{Σ} — суммарное СКО.

$$K = \frac{\Theta + \varepsilon}{S_{\Theta} + S_{\overline{x}}}, \tag{11}$$

где S_{Θ} — СКО неисключенной систематической погрешности.

$$S_{\Theta} = \frac{\Theta}{k\sqrt{3}}. \tag{12}$$

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S_{\Theta}^2 + S_{\overline{x}}^2}. \tag{13}$$

Отметим, что S_Θ определяется из предположения, что неисключенная систематическая погрешность, рассматриваемая как случайная величина, подчиняется равномерному закону распределения (отсюда в знаменателе соотношения (12) присутствует $\sqrt{3}$).

Еще раз отметим, что суммарная погрешность Δ может оказаться меньше одного из слагаемых. Особенно заметен этот эффект при малом числе измерений, доверительной вероятности $P = 0{,}99$ и значительном отличии суммируемых величин друг от друга.

Для иллюстрации описанного парадокса рассмотрим численный пример оценки погрешности прямых многократных измерений в соответствии с требованиями стандарта [1].

Пример 3

Проведены многократные ($n = 4$) измерения постоянного электрического напряжения U и получены следующие значения: 220, 216, 222, 218 В. Верхний предел измерения вольтметра $U_K = 300\,B$. Класс точности прибора 0,5. Методическая погрешность проведенных измерений $\Delta_M = 0{,}72\,\text{В}$, доверительная вероятность $P = 0{,}99$. Закон распределения результатов измерения принимается нормальным.

Вычисления по соотношениям (5) — (13) с заданной доверительной вероятностью дали следующие результаты:

$\bar{x} = \bar{U} = 219$ В;

$\Theta = 2{,}3222$ В;

$S = 2{,}5820$ В;

$K = 4{,}2465$;

$S_{\bar{U}} = 1{,}2910$ В;

$S_\Sigma = 1{,}6524$ В;

$\varepsilon = 7{,}5394$ В;

После округления полученных результатов по принятым в метрологии правилам получим: $\varepsilon' = 8$ В; $\Delta' = 7$ В; $\bar{U}' = (219 \pm 7)$ В. Отметим, что правила округления приведены в стандарте [1] (приложение Е).

Проведенные вычисления показывают, что значение случайной составляющей погрешности $\varepsilon' = 8$ В, а значение суммарной погрешности Δ' составило только 7 В, то есть одно из слагаемых (случайная погрешность) оказалось больше суммарной на 1 В (примерно на 12,5 %). При других соотношениях параметров «парадокс» может достигать 14–16 %.

Для преодоления описанного недостатка стандарта [1] и упрощения вычислений предлагается оценивать суммарную погрешность измерений по соотношению

$$\Delta = \sqrt{\Theta^2 + \varepsilon^2}. \qquad (14)$$

Геометрическое суммирование по (14) используется для случайных величин (см., например, [7, 8]). В нашем случае случайная погрешность ε является случайной величиной по определению. Неисключенная систематическая погрешность Θ, строго говоря, является систематической составляющей погрешности. Вместе с тем стандарт [1] рассматривает Θ при суммировании ее с ε как случайную величину с равномерным законом распределения (соотношения (12) и (13)).

Таким образом, геометрическое суммирование по (14) не противоречит требованиям стандарта [1] и хорошо согласуется с общепринятыми положениями метрологии, приведенными в работах [7, 8].

Проиллюстрируем суммирование погрешностей по (14) на численном примере.

Пример 4

С использованием условия примера 3 и результатов вычислений $\bar{x} = \bar{U} = 219$ В по (5), $\varepsilon = 7{,}5394$ В по (8) и $\Theta = 2{,}3222$ В по (9), находим по (14) суммарную погрешность измеряемой величины $\Delta = \pm 7{,}0167$ В. После округления полученных погрешностей до одного знака после запятой имеем: $\varepsilon' = 7{,}5$ В; $\Delta' = \pm 7{,}9$ В; $\Theta' = 2{,}3$ В. Измеряемая величина с учетом погрешности запишется как $U' = (219{,}0 \pm 7{,}9)$ В, т. е. случайная погрешность ε' меньше суммарной погрешности Δ', рассчитанной по соотношению (14), как и должно быть при непротиворечивом суммировании (без парадоксов).

Отметим, что для наглядности округление значений погрешностей проведено с некоторым отступлением от правил округления, приведенных в обязательном приложении «Е» стандарта [1]. По действующим правилам значение погрешности округляют до одной значащей цифры, если первая значащая цифра округляемого числа, при движении слева направо больше или равна трем (этот случай имеет место в рассматриваемых примерах). При округлении по действующим правилам в первом случае получаются следующие значения: $\varepsilon' = 6$ В; $\Delta' = \pm 5$ В; $\overline{U'} = (219 \pm 5)$ В.

Легко заметить, что при «правильном» округлении «парадокс» от суммирования по стандарту [1] стал еще заметнее: одно из слагаемых (случайная погрешность) оказалось больше суммы (суммарной погрешности) на 1 В (примерно на 16 %).

Во втором случае при округлении по действующим правилам получаются следующие значения: $\varepsilon' = 8$ В; $\Delta' = \pm 8$ В; $\overline{U'} = (219 \pm 8)$ В. В этом случае случайная и суммарная погрешность получаются равными между собой, что вполне допустимо при малой систематической погрешности, которой можно пренебречь.

Вывод

При суммировании погрешностей по ГОСТ Р 8.736–2011 в ряде случаев вычисления дают противоречивые результаты: суммарная погрешность может оказаться меньше случайной погрешности, т. е.

сумма может оказаться меньше одного из слагаемых. Предложенный метод суммирования по соотношению (14) свободен от этого недостатка: суммарная погрешность по (14) всегда больше любого из слагаемых или (в отдельных случаях) равна ему. Другим достоинством предложенного метода является заметно меньшая трудоемкость его применения.

В заключение отметим, что в статье использована терминология в соответствии с рекомендациями РМГ 29–2013 [9].

Литература/References

1. ГОСТ Р 8.736–2011. ГСОЕИ. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения. Введен с 01.01.2013, впервые. М. : Изд-во стандартов, 2013.

GOST R 8.736–2011. GSI (State system for ensuring uniform measurement). Multiple direct measurements. Methods of measurement results processing. Main principles. Moscow, Izdarelstvo Standartov Publ., 2013. (In Russian)

2. Р 50.2.038–2004. ГСОЕИ. Измерения прямые однократные. Оценивание погрешностей и неопределенности результата измерения. Введены с 01.01.2005 взамен МИ 1552–86. М. : Изд-во стандартов, 2005.

R 50.2.038–2004. GSI (State system for ensuring uniform measurement). Direct single measurements. Estimation of errors and uncertainty of measurements result. Moscow, Izdarelstvo Standartov Publ., 2005. (In Russian)

3. ГОСТ 8.207–76. ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения. М., 1986.

GOST 8.207–76. GSI (State system for ensuring uniform measurement). Direct measurements with multiple observations. Methods of processing the results of observations. Basic principles. Moscow, 1986.

4. Миронов Э. Г., Ордуянц Г. Ж. Оценка возможностей методов суммирования погрешностей прямых измерений // Измерительная техника. 1995. № 4. С. 10–12.

Mironov E. G., Orduyantz G. Zh. Ocenka vozmozhnostej metodov summirovanija pogreshnostej prjamyh izmerenij [Estimation of potentialities of methods of summation of direct measurement errors]. *Izmeritel'naja tehnika* [Measurements techniques], 1995, vol. 38, no. 4, pp. 10–12. (In Russian)

5. Миронов Э. Г., Ордуянц Г. Ж. Суммирование случайной и неисключенной систематической составляющих погрешности прямых измерений // Измерительная техника. 1998. № 6. С. 504–506.

Mironov E. G., Orduyantz G. Zh. Summirovanie sluchajnoj i neiskljuchennoj sistematicheskoj sostavljajushhih pogreshnosti prjamyh izmerenij [Summation of random and residual systematic components of errors in direct measurements]. *Izmeritel'naja tehnika* [Measurements techniques], 1998, vol. 41, no. 6, pp. 504–506. (In Russian)

6. Шевелев А. В., Зацепилова Ж. В. Метод определения суммарной погрешности измерения // Метрология. 2010. № 8. С. 3–7.

Shevelev A. V., Zacepilova Zh. V. Metod opredelenija summarnoj pogreshnosti izmerenija [Method of determination a total measurement error]. *Metrologiya* [Measurement Techniques]. 2010. vol. 8. P. 3–7. (In Russian)

7. Рабинович С. Г. Погрешности измерений. Л. : Энергия, 1978. 267 с.

Rabinovich S. G. Pogreshnosti izmereniy [Measurment errors]. Leningrad, Energiya Publ., 1978.262 p. (In Russian)

8. Новицкий П. В., Зограф И. А. Оценка погрешностей результатов измерений. 2-е изд, перераб. и доп. Л. : Энергоатомиздат, 1991. 248 с.

Novickij P. V., Zograf I. A. Otsenka pogreshnostey rezul'tatov izmereniy [Valuation of errors of measurement results]. Leningrad, Energoatomizdat Publ., 1985. 248 p. (In Russian)

9. РМГ 29–2013. ГСИ. Метрология. Основные термины и определения. Введены с 01.01.2015 взамен РМГ 29–99. М. : Изд-во стандартов, 2015.

RMG (transnational standardization recommendation) 29–2013. GSI (State system for ensuring uniform measurement). Metrology. Basic terms and definitions. Moscow, Izdarelstvo Standartov Publ., 2015. (In Russian)

Информация об авторах

Миронов Эдуард Георгиевич — кандидат технических наук, доцент Уральского федерального университета имени первого Президента России Б. Н. Ельцина (Екатеринбург, Россия).

Ордуянц Галина Жирайровна — кандидат технических наук, доцент Уральского государственного лесотехнического университета (Екатеринбург, Россия).

Information about the authors

Ehduard G. Mironov is a Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor at Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin (Ekaterinburg, Russian Federation).

Galina Zh. Ordyuants is a Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor at Ural State Forest Engineering University (Ekaterinburg, Russian Federation).

Поступила / Receiver: 27.04.2018

Принята в печать / Accepted: 14.07.2018